KOMBINAČNÍ ČÍSLO, PASCALŮV TROJÚHELNÍK

KOMBINAČNÍ ČÍSLO

Kombinační číslo je to zápis $\binom{n}{k}$, kde $n, k \in N_0 \wedge k \leq n$.

Pro kombinační číslo platí:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}}$$

Příklad 1:

- $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7.6.5!}{2!\,5!} = \frac{7.6}{2!} = \frac{7.6}{2} = 21$
- $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10.9.8.7!}{3!\,.\,7!} = \frac{10.9.8}{3!} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 120$

VLASTNOSTI KOMBINAČNÍCH ČÍSEL

Příklad 2:

- $\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!\,5!} = 1$
- $\binom{138}{0} = \frac{138!}{0!\,138!} = 1$

- $\binom{7}{7} = \frac{7!}{7!\ 0!} = 1$
- $\binom{253}{253} = \frac{253!}{253!\ 0!} = 1$

Lze odvodit, že pro povolené hodnoty *n*, *k* platí:

$$\boxed{\binom{\boldsymbol{n}}{\mathbf{0}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}} = \mathbf{1}}$$

<u>Příklad 3</u>:

- $\binom{9}{1} = \frac{9!}{1!\ 8!} = \frac{9.8!}{1.8!} = 9$
- $\binom{735}{1} = \frac{735!}{1!\ 734!} = \frac{735.734!}{1.734!} = 735$

Lze odvodit, že pro povolené hodnoty *n*, *k* platí:

$$\boxed{\binom{\boldsymbol{n}}{\mathbf{1}} = \boldsymbol{n}}$$

<u>Příklad 4</u>:

- $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\ 5!} = \frac{8.7.6.5!}{3!\ 5!} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56$
- $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\ 3!} = \frac{8.7.6.5!}{5!\ 3!} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56$
- $\binom{71}{2} = \frac{71!}{2!\ 69!} = \frac{71.70.69!}{2!\ 69!} = \frac{71.70}{2} = 2485$
- $\binom{71}{69} = \frac{71!}{69!\ 2!} = \frac{71.70.69!}{69!\ 2!} = \frac{71.70}{2} = 2485$

Lze odvodit, že pro povolené hodnoty *n*, *k* platí:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n-k}}$$

PASCALŮV TROJÚHELNÍK

Je to trojúhelník, jehož jednotlivé řádky tvoří kombinační čísla $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\ldots,\binom{n}{n-1},\binom{n}{n}$ obecně vyjádřena $\binom{n}{k}$, kde $n = 0, 1, 2, \ldots$ a $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Poznámka 1: trojúhelník je uveden ve tvaru kombinačních čísel a přirozených čísel

Poznámka 2: určete vlastnosti kombinačních čísel na základě Pascalova trojúhelníku

***n* = 0**	$\binom{0}{0}$	1
***n* = 1**	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$	1 1
***n* = 2**	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$	1 2 1
***n* = 3**	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	1 3 3 1
***n* = 4**	$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$	1 4 6 4 1
***n* = 5**	$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$	1 5 10 10 5 1
***n* = 6**	$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$	1 6 15 20 15 6 1
***n* = 7**	$\binom{7}{0}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{2}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{7}{6}$ $\binom{7}{7}$	1 7 21 35 35 21 7 1
***n* = 8**	$\binom{8}{0}$ $\binom{8}{1}$ $\binom{8}{2}$ $\binom{8}{3}$ $\binom{8}{4}$ $\binom{8}{5}$ $\binom{8}{6}$ $\binom{8}{7}$ $\binom{8}{8}$	1 8 28 56 70 56 28 8 1
***n* = 9**	$\binom{9}{0}$ $\binom{9}{1}$ $\binom{9}{2}$ $\binom{9}{3}$ $\binom{9}{4}$ $\binom{9}{5}$ $\binom{9}{6}$ $\binom{9}{7}$ $\binom{9}{8}$ $\binom{9}{9}$	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
⋮	⋮	

VLASTNOSTI PASCALOVA TROJÚHELNÍKU

Pascalův trojúhelník má tyto vlastnosti:

- každý jeho řádek začíná a končí číslem 1
  - tato vlastnost Pascalova trojúhelníku potvrzuje vztah pro kombinační čísla:
    - $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

- na druhém místě (a také předposledním) je číslo *n*
  - tato vlastnost Pascalova trojúhelníku potvrzuje vztah pro kombinační čísla:
    - $\binom{n}{1} = n$

- je souměrný podle svislé osy
  - tato vlastnost Pascalova trojúhelníku potvrzuje vztah pro kombinační čísla:
    - $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

- součet dvou sousedních čísel v každém řádku je roven číslu, které leží v následujícím řádku „pod jejich středem“
  - z této vlastnosti Pascalova trojúhelníku plyne další vztah pro kombinační čísla:

$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$$